数理解析研究所講究録
942巻 1996年 153-163

種数 2の代数曲線の代数対応による実乗法の構成

早大理工: 橋本喜一朗

1 はじめに. (問題と動機)

Wiles (および Tayler) による $\mathbf{Q}$ 上の楕円曲線に対する谷山-志村予想の (条件付き) 解決は arithmetic geometry における新時代の幕開けを告げるものであったと言えよう — これによって, 我々はその関心を次の段階に向けることが可能になったのである。すなわち, $\mathbf{Q}$ 上の楕円曲線の次に取り組むべき対象は, 素朴に考えれば, 次の何れかであろう:

1) 代数体 (特に 2 次体) 上の楕円曲線,
2) $\mathbf{Q}$ 上の種数 2 の代数曲線,
3) $\mathbf{Q}$ 上のアーベル曲面.

しかし, これらも良くみると各々がその内部構造により細分され, それによって数論的構造が異なってくる。実は, これらの Hasse-Weil 型 L-関数に関する予想を問題にする場合, 上記の三種の対象は, 同一の概念で記述される subcategory を有する。この共通概念は, Ribet により導入され, "GL(2)-type" と呼ばれる。

<u>定義.</u> $\mathbf{Q}$ 上のアーベル多様体 A は, その $\mathbf{Q}$ 上定義された自己準同型のなす $\mathbf{Q}$-algebra $\mathrm{End}_{\mathbf{Q}}(A)\otimes\mathbf{Q}$ が $[\mathrm{End}_{\mathbf{Q}}(A)\otimes\mathbf{Q}:\mathbf{Q}]=\dim(A)$ を満たす代数体であるとき, "GL(2)-type" と呼ばれる。

但し, ここで 1) に対しては, 代数体 K 上定義された楕円曲線 E に対して, $A:=\mathrm{Res}_{K/\mathbf{Q}}(E)$ が, また 2) に対しては, $\mathbf{Q}$ 上の種数 2 の代数曲線 C に対して, その jacobian variety $A:=Jac(C)$ が, GL(2)-type であるかどうかを問題にする。

<u>Modular Conjecture (Serre-Ribet)</u>: $\mathbf{Q}$ 上のアーベル多様体 A が GL(2)-type ならば, A は modular curve $X_1(N)$ の jacobian $J_1(N)$ の因子と $\mathbf{Q}$- 上 isogenous である。

この予想の根拠となる事実の説明および部分的解決に関しては, 本報告集の百瀬氏の稿を参照して頂きたい。

本稿の目的は, ($\mathbf{Q}$ 上の) アーベル曲面 を代数曲線の立場から記述し, GL(2)-type となる実例を与えることであるが, 主に Mestre [9] の仕事の紹介である。ただし, [9] の基礎となっている Humbert, Griffith-Harris の古典的な仕事も, 日本の数論の間ではそれほど知られていないと思われるので, ここに簡単にまとめて紹介する。

A を 複素数体 $\mathbf{C}$ 上の simple な 2 次元の主偏極付きアーベル多様体とし, $\mathrm{End}(A)$ をその自己準同型のなす環とする。このとき, $\mathbf{Q}$-algebra $\mathrm{End}^{\circ}(A):=\mathrm{End}(A)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$ は以下の何れかになる。

(i) 4 次の CM-field, (ii) $\mathbf{C}$ 上の 不定符号四元数体,

(iii) 実 2 次体,　　(iv) 有理数体 $\mathbf{Q}$.

$\mathcal{A}_{2,1}$ を主偏極付きアーベル曲面の moduli space とする。$\mathcal{A}_{2,1}$ 上で上記の各タイプの アーベル曲面の locus は, 0,1,2,3 次元の部分集合をなし, 前 3 者の既約成分は各々

(i) CM-points,　(ii) Shimura curves,　(iii) Humbert surfaces [1]

と呼ばれる。他方, Torelli の定理によって $\mathcal{A}_{2,1}$ は種数 2 の曲線の moduli space $\mathcal{M}_2$ に双有理同値であることが知られている。$\mathcal{M}_2$ から $\mathcal{A}_{2,1}$ への写像 (Abel-Jacobi map) は, 曲線 C に $(Jac(C), \Theta_C = C)$ を対応させることに他ならない。(逆向きの写像は Rosenhain によって, theta 関数を用いて与えられている)。そこで我々の目的は, $\mathcal{M}_2$ の座標を用いて, 即ち代数曲線の言葉で上記 (i),(ii), (iii) に属するアーベル曲面を具体的に記述することである。ここでは, 特に (iii) の場合, 即ち $Jac(C)$ が, 与えられた判別式 Δ の 2 次体の整環 (order) を実乗法にもつ様な曲線の方程式を与えることを考える。実は, この問題は 100 年程前に既に G.Humbert [6] によって組織的に研究され, 小さな判別式の場合には (C 上では) 解答が与えられている。

2　Humbert の仕事

2.1　Kummer 曲面と $(16)_6$–configration

$\mathfrak{H}_2$ を 2 次の Siegel 上半平面とする:

$$\mathfrak{H}_2 := \{\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{C}) \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$$

$\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{H}_2$ に対して, 行列 $(1_2\ \tau) = (p_1, \ldots, p_4)$ の列ベクトルで張られる $\mathbf{C}^2$ の lattce を L_τ とし,

$$A_\tau = \mathbf{C}^2/L_\tau$$

とおくと, $(A_\tau,\ \Theta)$ は主偏極付きアーベル曲面 となる。ここで, A_τ の主偏極は

$$E(p_h, p_k) = J, \qquad J := \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{pmatrix}$$

で定まる $\mathbf{C}^2$ の standard Riemann form E によって与えられる。主偏極に対応する因子 (theta divisor) Θ は以下の様に記述される。$a = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ に対して, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を characteristic とする theta 関数 $\theta(z)$, $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ を

$$\theta(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}^2} e^{\pi\sqrt{-1}\,{}^t(n+a)\tau(n+a)+2\pi\sqrt{-1}\,{}^t(n+a)(z+b)},$$

で定めるとき, $\theta(z)$ の零点集合が Θ に他ならない。そして, $\mathcal{A}_{2,1} \cong \mathfrak{H}_2/\mathrm{Sp}(2,\mathbf{Z})$。以下では, Θ は種数 2 の既約な代数曲線 C になるものとする。まず, (A_τ, Θ) から曲線 C を再構成するアイ

[1]Humbert 曲面 H_Δ はその moduli 的解釈から明かな様に, 実 2 次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{\Delta})$ に属する Hilbert modular 曲面と同型である。

デアについて簡単に説明しよう。$A_\tau[2]$ を A_τ の 16 個の 2 等分点からなる部分群とする。これらは,

$$\xi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \varepsilon + \lambda\tau_1 + \lambda'\tau_2 \\ \varepsilon' + \lambda\tau_2 + \lambda'\tau_3 \end{pmatrix} \ \mathrm{mod} L_\tau \qquad (\varepsilon,\ \varepsilon',\ \lambda,\ \lambda' \in \{0,\ 1\})$$

によって与えられる。いま Humbert に従って,これらに次の様に名前をつけておく:

notation	ε	ε'	λ	λ'
(11)	0	0	0	0
(12)	0	1	0	0
(21)	1	0	0	0
(22)	1	1	0	0
(31)	0	0	1	0
(32)	0	1	1	0
(41)	1	0	1	0
(42)	1	1	1	0
(13)	0	0	0	1
(14)	0	1	0	1
(23)	1	0	0	1
(24)	1	1	0	1
(33)	0	0	1	1
(34)	0	1	1	1
(43)	1	0	1	1
(44)	1	1	1	1

Table 1 : Humbert's notation for $A_\tau[2]$.

すると, $\theta(z)$ の変換公式から次がわかる:

$$\Theta \cap A_\tau[2] = \{\ (11),\ \ (22),\ \ (31),\ \ (41),\ \ (23),\ \ (24)\ \}$$

そこで,

$$\phi\ :\ A_\tau \longrightarrow \mathbf{P}^3$$

を,完備線形系 $|2\Theta|$ に対する 射 とする。ϕ の像は $A_\tau/\langle\iota\rangle$ ($\iota : x \mapsto -x$ は A_τ の位数 2 の自己同型) と同型で, $\mathbf{P}^3$ 内の 4 次曲面となる。これは A_τ の Kummer 曲面と呼ばる。$\mathrm{Kum}(A_\tau)$ と記す。その特異点は, $A_\tau[2]$ の像である 16 個の二重点である。$\xi \in A_\tau[2]$, に対して

$$\Theta_\xi := T_\xi(\Theta) \quad \& \quad \widehat{\Theta}_\xi := \phi(T_\xi(\Theta))$$

とおく (T_ξ は ξ による平行移動)。このとき, $2T_\xi(\Theta) \in |2\Theta|$ より, $\mathbf{P}^3$ 内の超平面 H_ξ で, H_ξ と $\mathrm{Kum}(A_\tau)$ の交差因子が $2\widehat{\Theta}_\xi$ に一致するものが一意的に定まる。H_ξ は Kummer 曲面 $\mathrm{Kum}(A_\tau)$ の *singular plane* と呼ばれる。以下, $\phi((ij))$ $(1 \le i,j \le 4)$ を (ij) と略記する。これらの 16 個の singular planes と 16 個の double points は,以下の様な対称性を持った configulation を形成しており,古典的代数幾何学における名所旧跡の一つである。16 個の singular planes は以下の条件をみたす様に記号 kl $(1 \le k, l \le 4)$ で表記される:

1. 各 singular plane kl 上には 6 個の double points $\{\ (ij) \mid i = k,\ j \ne l \text{ or } i \ne k,\ j = l\ \}$ がある。

2. 各 double point (ij) を通る singular planes が 6 個あり, それらは $\{ kl \mid k = i,\ l \neq j \text{ or } k \neq i,\ l = j \}$。

Double point (11) を含まない $\mathbf{P}^3$ 内の平面 Π を一つ選んで固定する。次の図は, (11) を通る $\mathrm{Kum}(A_\tau)$ の 6 個の singular planes の Π による断面を表わす。

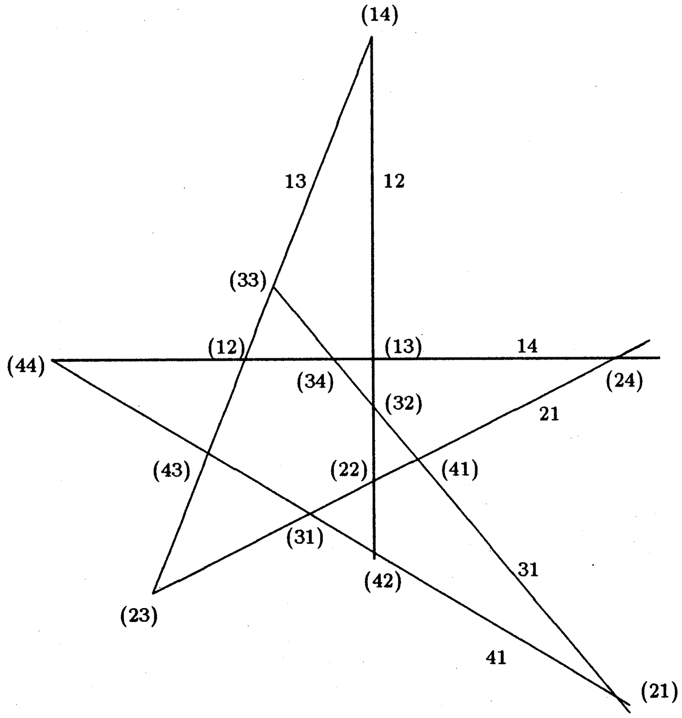

Figure 1 : singular planes の断面

Singular plane H_ξ は, $\mathrm{Kum}(A_\tau)$ と 2 次曲線 $\widehat{\Theta}_\xi$ に沿って接している。これより次のことが容易にわかる: D を $\mathrm{Kum}(A_\tau)$ 上の任意の曲線とすると, D の (11) から平面 Π への射影は, 上記断面図の 6 本の直線と接するか, でなければ 点 (ij) に於いて交わる。実際, (11) に於ける $\mathrm{Kum}(A_\tau) \subset \mathbf{P}^3$ の tangent cone と Π の交わり Γ は前者の条件をみたす。ここで, $\Pi \cong \mathbf{P}^2$ の同次座標 $x,\ y,\ z$ を Γ が方程式 $yz = x^2$ で与えられる様に取り, 6 本の直線 14, 21, 12, 13, 31, 41 が各々方程式

$$(1) \qquad \ell_i : \quad y + 2a_i x + a_i^2 z = 0, \qquad (1 \leq i \leq 6)$$

で表されるものとする。

Proposition 2.1 C は次の方程式で表される曲線と同型である:

$$(2) \qquad Y^2 = (X - a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_5)(X - a_6).$$

□

2.2 Humbert's modular equations

<u>定義.</u> $\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix}$ of $\mathfrak{H}_2$ に対して, 互いに素な整数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \in \mathbf{Z}$ で, 次の条件をみたすものが存在するとき, τ は 判別式 Δ の singular relation を持つという。

$$(3) \qquad \alpha\tau_1 + \beta\tau_2 + \gamma\tau_3 + \delta(\tau_2^2 - \tau_1\tau_3) + \epsilon = 0,$$

$$(4) \qquad \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma - 4\delta\epsilon.$$

$$N_\Delta := \{\tau \in \mathfrak{H}_2 \mid \tau \text{ は判別式 } \Delta \text{ の singular relation を持つ}\},$$

$$H_\Delta := \text{image of } N_\Delta \text{ under the canonical map } \mathfrak{H}_2 \longrightarrow Sp(4, \mathbf{Z})\backslash\mathfrak{H}_2 .$$

とおく。H_Δ は判別式 Δ の *the Humbert surface* と呼ばれる。さて, $\mathrm{End}(A_\tau)$ の有理表現を用いると, その自己準同型環は

$$\mathrm{End}(A_\tau) = \{\phi \in \mathrm{M}_2(\mathbf{C}) \mid \exists M \in \mathrm{M}_4(\mathbf{Z}) \text{ s.t. } \phi(\tau\ 1_2) = (\tau\ 1_2)M \cdots (*)\}.$$

と表現される。$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, と書くと, $(*)$ は次と同値である:

$$\phi = \tau B + D,\ \phi\tau = \tau A + C \quad \Leftrightarrow \quad \tau B\tau + D\tau - \tau A - C = 0 \cdots (**).$$

Riemann form E から, $\mathrm{End}(A_\tau)$ 上に Rosati involution $\phi \mapsto \phi^\circ$ が定まり, $E(\phi z,\ w) = E(z,\ \phi^\circ w)$ $(\forall z,\ w \in \mathbf{C}^2)$ をみたす。このとき

$$\begin{aligned} \phi^\circ = \phi \quad &\Longleftrightarrow \quad {}^tM \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{pmatrix} M \\ &\Longleftrightarrow \quad A = {}^tD,\ B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ とおく。条件 $\phi^\circ = \phi$ から,

$$(**) \Longleftrightarrow a_2\tau_1 + (a_4 - a_1)\tau_2 - a_3\tau_3 + b(\tau_2^2 - \tau_1\tau_3) + c = 0.$$

従って

$$\phi = \tau B + D = \begin{pmatrix} -b\tau_2 + a_1 & b\tau_1 + a_3 \\ -b\tau_3 + a_2 & b\tau_2 + a_4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,\phi &= a_1 + a_4, \\ \det\phi &= -b\{a_2\tau_1 + (a_4 - a_1)\tau_2 - a_3\tau_3 + b(\tau_2^2 - \tau_1\tau_3)\} + a_1a_4 - a_2a_3 \\ &= a_1a_4 - a_2a_3 + bc. \end{aligned}$$

これより, ϕ の特性多項式は

$$T^2 - (a_1 + a_4)T + (a_1a_4 - a_2a_3 + bc)$$

となる。また, その判別式 Δ は次式で与えられる:

$$\Delta := (a_1 + a_4)^2 - 4(a_1a_4 - a_2a_3 + bc) = (a_4 - a_1)^2 - 4a_2(-a_3) - 4bc.$$

以上のことから, 次の結果が得られる:

Proposition 2.2 $\mathbf{O}_\Delta$ を実 *2* 次体 K の整環 *(order)* で, 判別式 Δ であるものとするとき,

$$\exists\psi : \mathbf{O}_\Delta \longrightarrow \mathrm{End}(A_\tau) \qquad \Leftrightarrow \qquad \tau \in H_\Delta$$

H_Δ の各点は, singular relation $a\tau_1 + b\tau_2 + \tau_3 = 0$, $b^2 - 4a = \Delta$, $b = 0$ or 1. をみたす $\tau \in \mathfrak{H}_2$ で代表されることが示される。

Proposition 2.3 ([6]) $\tau \in \mathfrak{H}_2$ が 判別式 $\Delta = 5$ の *singular relation*

$$-\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0,$$

をみたすとき, Π 上の 2 次曲線 D で,5 点

$$(34),\ (14),\ (33),\ (22),\ (24)$$

を通り, ℓ_6 (*Figure* 1 を参照) と接するものが存在する。逆に, この様な 2 次曲線 があれば τ は $\Delta = 5$ に対する *singular relation* をみたす。

PROOF. 前半の主張を示す。上で見た様に, $-\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$ の形の relation から 行列

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

に対応する A_τ の自己準同型 α が生ずる。α の特性多項式は $T^2 - T - 1 = 0$ である。ここで,

$$\alpha(\{(34),\ (14),\ (33),\ (22),\ (24),\ (11)\}) = \{(42),\ (44),\ (31),\ (21),\ (43),\ (11)\},$$

から, 右辺の集合は $\Theta_{(31)} \cap A_\tau[2]$ と一致し,

$$\alpha^*\Theta_{(31)} \cap A_\tau[2] = \{(34),\ (14),\ (33),\ (22),\ (24),\ (11)\},$$

となる。D を, (11) から Π への射影による $\phi(\alpha^*\Theta_{(31)})$ の像の閉包とすると,

$$D \cap \{(ij) \text{ in Figure 1}\} = \Big\{(34),\ (14),\ (33),\ (22),\ (24)\Big\},$$

と先の注意より D は ℓ_6 と接することがわかる。すると, 交点数の計算から

$$(2\Theta,\ \alpha^*\Theta_{(31)}) = (2\Theta_{(31)},\ \alpha^*\Theta_{(31)}) = 2\mathrm{Tr}_{K/\mathbf{Q}}(\alpha^2) = 6, \qquad K = \mathbf{Q}(\sqrt{5}).$$

これより (ϕ の次数が 2 だから), $\phi(\alpha^*\Theta_{(31)})$ は次数 3 の曲線であることがわかる。Π 上の直線 ℓ を, ℓ が D の generic points で (transversal に) 交わる様にとる。また, ℓ と (11) を含む $\mathbf{P}^3$ 内の超平面 H をとる。このとき

$$\begin{aligned}(D,\ \ell) = \sharp\{D \cap \ell\} &\leq \sharp\{H \cap \phi(\alpha^*\Theta_{(31)})\backslash\{(11)\}\} \\ &\leq 2.\end{aligned}$$

が成立する。従って, D は 2 次曲線 であり, 主張の条件をみたす。 □

この結果から初等幾何学により, H_5 の "modular equation" が計算できる。まず, 一般性を失うことなく, (1) に於ける ℓ_6 の方程式は $z = 0$ (i.e. $a_6 = \infty$) であると仮定する。

Theorem 2.4 ([6]) 種数 2 の曲線 C が 方程式

$$Y^2 = (X-a_1)(X-a_2)\cdots(X-a_5) \tag{5}$$

で与えられるとする。このとき, $Jac(C)$ が 判別式 $\Delta = 5$ の実乗法を持つ (即ち, $(Jac(C), \Theta_C) \in H_5$) ための必要十分条件は, 等式 $F_5(a_1, a_2, \ldots, a_5) = 0$ が成立することである:

(6) $F_5(a_1, \ldots, a_5)$

$$\begin{aligned} := \ & 4\{a_1^2(a_3-a_4)+a_2^2(a_4-a_5)+a_3^2(a_5-a_1)+a_4^2(a_1-a_2)+a_5^2(a_2-a_3)\} \\ & \times\{a_1^2(a_3-a_4)a_2a_5+a_2^2(a4-a5)a_3a_1+\ldots+a_5^2(a_2-a_3)a_1a_4\} \\ & -\{a_1^2(a_3-a_4)(a_2+a_5)+a_2^2(a4-a5)(a_3+a_1)+\ldots+a_5^2(a_2-a_3)(a_1+a_4)\}^2 \end{aligned}$$

□

Humbert は同様に H_8 ($\Delta = 8$) の "modular equation" も計算している。結果のみ記すと以下の通り:

Proposition 2.5 ([6]) $\Delta = 8$) の *singular relation* は $-2\tau_1 + \tau_2 = 0$ に簡約できる。このとき Π 上の 2 次曲線 D で, 4 点

(32), (34), (42), (44)

を通り, ℓ_2, ℓ_4 (*Figure* 1 を参照) と接するものが存在する。逆に, この様な 2 次曲線 があれば τ は $\Delta = 4$ または 8 に対する *singular relation* をみたす。

Theorem 2.6 ([6]) 種数 2 の曲線 C が 方程式

$$Y^2 = X(X-b_1)(X-b_2)(X-b_3)(X-b_4) \tag{7}$$

で与えられるとする。このとき, $Jac(C)$ が 判別式 $\Delta = 8$ の実乗法を持つ (即ち, $(Jac(C), \Theta_C) \in H_8$) ための必要十分条件は, 等式 $F_8(b_1, b_2, b_3, b_4) = 0$ が成立することである:

$F(8)(b_1, b_2, b_3, b_4)$

$$:= 4b_1b_2b_3b_4\{(b_1+b_3)(b_2+b_4)-2(b_1b_3+b_2b_4)\}^2 - \{(b_2-b_4)^2(b_1-b_3)^2(b_1b_3+b_2b_4)^2\}$$

3 Poncelet の閉形定理 と Griffith-Harris の結果

次の問題は, 方程式 $F_5(a_1, a_2, \ldots, a_5) = 0$ および $F_8(b_1, b_2, \ldots, b_4) = 0$ を各々解くことである。実 2 次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{2}), \mathbf{Q}(\sqrt{5})$ に属する Hilbert modular 曲面 は何れも有理曲面であることが知られているから, これらは $\mathbf{C}$ 上では 2 個の自由パラメータを用いて解ける筈である。しかし, これを直接強引に解くことは容易ではない。次節で扱う様に我々は, 曲線 C のみならず, 実乗法に対応する $Jac(C)$ の自己準同型の定義体をも問題にするので, より構造的な考察が必要である。まず, 前節の Humbert の結果を 双対的に述べると,「Poncelet の閉形定理」が表面に現れることに注意する。種数 2 の曲線 C に対して, C から 2 次曲線 への 次数 2 の map $\varphi : C \to D_1$ を与えておく。このとき, D_1 を 射影直線 $\mathbf{P}^1$ と同一視して, φ の 6 個の分岐点 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_6 \in D_1$ の $\mathbf{P}^1$ での座標を $a_1, \ldots, a_6$ とすれば, C は方程式 (2) で与えられる。このとき, Proposition 2.3 は次と同値である:

Proposition 3.1 ([6]) *JacC* が $\Delta = 5$ の実乗法を持つ為の条件は, $Q_6 \in D_1$ をを通り, かつ 5 角形 $Q_1Q_2 \ldots Q_5$ に内接する 2 次曲線 D_2 が存在することである。但し,6 点の順序は適当に選ぶものとする。

一般に, 平面上の 2 次曲線 D_1 上に頂点を持つ n 角形 $Q_1Q_2ldotsQ_n$ に対して, これに内接する別の 2 次曲線 D_2 が存在するとき, この n 角形 を「Poncelet の n 角形」という。

Theorem 3.2 (「**Poncelet の閉形定理**」) 平面上の二つの 2 次曲線 D_1, D_2 に対して *Poncelet* の n 角形 が一つでも存在すれば連続的に無限個存在する。

この初等幾何的な定理の背後に楕円関数・楕円曲線が潜んでいることは, Jacobi, Cayley 等, 古くから多くの数学者に知られていたようである。ここでは, この問題に現代の代数幾何学から光を当てて止めをさした, Griffith-Harris の結果を紹介する。それは次節への準備でもある。

平面上の二つの 2 次曲線 D_1, D_2 が与えられたとする。このとき, $D_2^* := D_2$ の双対とは, D_2 の接線の集合であって, これも 2 次曲線 となる。

Lemma 3.3 ([2]) D_1, D_2 が一般の位置にある (異なる *4* 点で交わる) とする。このとき

$$E := \{(x,\xi) \mid x \in D_1, \;\; \xi \in D_2^*\}$$

は (**C** 上の) 種数 1 の曲線である。

Proof. 射影 $E \to D_1$, $(x,\xi) \mapsto x$ を考えると, これは次数 2 の morphism で, 分岐点は丁度 D_1, D_2 に他ならない。よって, E は $D_1 \cong \mathbf{P}^1$ の 4 点分岐の 2 重被覆となるから, 種数 1 の曲線である。 □

これより, E の一点を選んで原点として, E を楕円曲線とみなせる。$x \in D_1$ を一般点とし, x から D_2 への接線を ξ, ξ', とし, ξ' と D_1 の交点を x, x' とする。このとき, map $\tau : (x,\xi) \mapsto (x',\xi')$ は E から E への morphism を定める。次は直ちに判る:

Lemma 3.4 ([2]) $\tau : E \to E$ は固定点を持たない。従って, 平行移動である: $\exists \mathbf{a} \in E$, $\tau(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}$

□

閉形定理を証明しよう。D_1, D_2 に対して Poncelet の n 角形 $Q_1Q_2 \ldots Q_n$ があるとする。このとき, $\xi_i := Q_iQ_{i+1} \in D_2$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ となる。但し, $Q_{n+1} = Q_1$, $\xi_n := Q_nQ_1$。$(Q_1, \xi_1) \in E$ に τ を n 回 適用すると, 自身に戻る。一方 Lemma 3.4 より

$$Q_1, \xi_1) = \tau^n(Q_1, \xi_1) = (Q_1, \xi_1) + n\mathbf{a}$$

従って, $n\mathbf{a} = 0$。即ち, 平行移動 τ を与える $\mathbf{a} \in E$ は E の n 等分点である。このとき, 明らかに D_1 の任意の点 Q_1 から出発しても τ を n 回 適用すると, 自身に戻る。これが定理の主張である。 □

4 Mestre の仕事

4.1 楕円曲線の 5-isogeny $\Rightarrow$ $\Delta = 5$ の実乗法を持つ曲線

前々節で, $Jac(C)$ が 判別式 $\Delta = 5$ の実乗法を持つ種数 2 の曲線 C を与えることと, Poncelet の 5 角形を構成することがほぼ同値であることを示し, 前節ではこれが更に, 楕円曲線の 5 等分点を与えることに帰着することを見た。この節では, 逆に, 楕円曲線の 5 等分点 から元の曲線 C が再構成されることを示し, 一巡の考察を完結させる。

次のデータから出発する。$E = E_1$ を体 k 上の楕円曲線とし,

$$\varphi : E_1 \longrightarrow E_2 := E_1/\mathbf{G}, \qquad \mathbf{G} =< \mathbf{r} >\cong \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$$

を k 上定義された次数 5 の isogeny とする。$x_i : E_i \to \mathbf{P}^1$ $(i = 1, 2)$ を 原点に極をもつ位数 2 の関数とする。従って, 次数 5 の有理関数 $u(x)$ が存在して, $u \circ x_1 = x_2 \circ \varphi$ となる。また変数 t に対して $E_1(\bar{k(t)})$ の点 $\mathbf{q}_t$ を $u(x_1(q_t)) = t$ となる様に選んでおく。

(9)
$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\varphi} & E_2 = E_1/\mathbf{G} \\ {\scriptstyle x_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x_2} \\ \mathbf{P}^1 & \xrightarrow{u} & \mathbf{P}^1 \end{array}$$

そこで, 曲線 $C_{\varphi,t}$ を次式で定める:

(10)
$$C_{\varphi,t}: \qquad Y^2 \ = \ u(X) - t$$

このとき, 各 $\mathrm{s} \in \mathbf{G}$ に対して, $x_{\mathrm{s}} := x_1(\mathbf{q}_t + \mathrm{s}) \in \mathbf{P}^1$ とおくと,

$$u(x_{\mathrm{s}}) = u \circ x_1(\mathbf{q}_t + \mathrm{s}) = x_2 \circ \varphi(\mathbf{q}_t + \mathrm{s}) = x_2 \circ \varphi(\mathbf{q}_t) = t$$

よって, $(x_{\mathrm{s}}, 0) \in C_{\varphi,t}$。また, $x_{\mathrm{s}} = x_{\mathrm{s}'}$ $(= a$ とおく$)$ ならば

$$\mathrm{div}(x_1 - a) = [\mathbf{q}_t + \mathrm{s}] + [\mathbf{q}_t + \mathrm{s}'] - 2[O_{E_1}]$$

となるから Abel の定理より, $2\mathbf{q}_t + \mathrm{s} + \mathrm{s}' = O_{E_1}$, $2\mathbf{q}_t \in \mathbf{G}$, よって $(t, 0) \in E_1[2]$ となる。従って, $t \in \bar{k}$ を $(t, 0) \notin E_1[2]$ なる様に選ぶ限り,

$$x = x_1 : \ C_{\varphi,t} \longrightarrow \mathbf{P}^1$$

は丁度 6 点 $((x_{\mathrm{s}}, 0), \mathrm{s} \in \mathbf{G}$ 及び無限遠点$)$ で分岐する $\mathbf{P}^1$ の 2 重被覆となるから $C_{\varphi,t}$ は種数 2 の曲線となる。また以上のことから, $C_{\varphi,t}$ の方程式を正規化して

(11)
$$C_{\varphi,t}: \qquad Y^2 \ = \ \prod_{\mathrm{s} \in \mathbf{G}} (X - x_1(\mathbf{q}_t + \mathrm{s}))$$

とできることがわかる。右辺の 5 次多項式は $k(t)$ に係数をもつ。

4.2 代数対応による実乗法の構成

この様に, 楕円曲線 E_1 の座標を用いて種数 2 の曲線を表現できる。このアイデアを押し進めると, $\Delta = 5$ の実乗法を C の代数対応として表現することが容易に可能となる。

<u>定義.</u> $\psi \in \mathrm{End}(\mathrm{Pic}(C_{\varphi,t}))$ を

$$\psi : (x, y) = (x_1(\mathbf{q}), y) \mapsto (x_1(\mathbf{q} + \mathbf{r}), y) + (x_1(\mathbf{q} - \mathbf{r}), y) \qquad (\mathbf{q} \in E_1)$$

で定める。

Theorem 4.1 ([9]) *上記の ψ の $\mathrm{Pic}^0(C_{\phi,t})$ への制限は次式をみたす:*

(12)
$$\psi^2 + \psi \ = \ Id.$$

PROOF. 定義から直ちに, $\psi^2+\psi-Id$ の作用は

$$\psi^2+\psi-Id:\ (x_1(\mathbf{q}),y)\mapsto \sum_{\mathbf{s}\in\mathbf{G}}(x_1(\mathbf{q}+\mathbf{s}),y)$$

で与えられることが判る。一方, (11) で与えられる曲線上任意の点を $(x_1(\mathbf{q}_0),y_0)$ $(\mathbf{q}_0\in E_1)$ とするとき, X の 5 次方程式 $u(X)-t=y_0$ の 5 根が $\{x_1(\mathbf{q}_0+\mathbf{s})\mid \mathbf{s}\in\mathbf{G}\}$ となることから, 関数 $y-y_0$ の因子は

$$\operatorname{div}(y-y_0)=\sum_{\mathbf{s}\in\mathbf{G}}[(x_1(\mathbf{q}_0+\mathbf{s}),y_0)]-5[(\infty,\infty)]$$

となる。即ち,

$$\sum_{\mathbf{s}\in\mathbf{G}}[(x_1(\mathbf{q}_0+\mathbf{s}),y_0)]\ \sim\ 5[(\infty,\infty)] \qquad (\text{線型同値})$$

ここで, $\mathbf{q}_0\in E_1$ は任意であるから結局

$$\sum_{\mathbf{s}\in\mathbf{G}}[(x_1(\mathbf{q}_0+\mathbf{s}),y_0)]\ \sim\ \sum_{\mathbf{s}\in\mathbf{G}}[(x_1(\mathbf{q}+\mathbf{s}),y)] \qquad (\text{線型同値})$$

従って, $\psi^2+\psi-Id$ は $\mathrm{Pic}^0(C_{\phi,t})$ 上では零射となる。 □

この結果を用いて, ψ の方程式を計算できる。以下では $k=\mathbf{Q}$ とする。楕円曲線の 5-isogeny は modular 曲線 $X_1(5)\cong\mathbf{P}^1$ で parametrize される。即ち, Tate による次の方程式が知られている:

$$(13)\qquad E_1:\quad y^2+(1-s)xy-sy\ =\ x^3-sx^2 \qquad (s\ \text{は自由 parameter})$$

ここで, $\mathbf{r}:=(0,0)\in E_1$ は位数 5 の点である。これより, $\mathbf{G}=<\mathbf{r}>$ とおいて isogeny $\varphi: E_1\longrightarrow E_2:=E_1/\mathbf{G}$ を考えると,

$$u(X)=X+\frac{s(s-1)}{X}+\frac{s^2}{X^2}+\frac{s^2(s+1)}{X-s}+\frac{s^4}{(X-s)^2}$$

変数・パラメータを $X\to -sX$, $\sqrt{-1}X(X-s)Y/s^2\to Y$, $t\to 3-t-3s$ と変更すると, $C_{\varphi,t}$ の新しい方程式

$$(14)\ C_{s,t}:\ Y^2\ =\ sX^5-(s+t-3)X^4+(s^2-3s+5-2t)X^3-tX^2+(s-3)X-1$$

を得る。このモデルで代数対応 $\psi\leftrightarrow X_\psi\subset C_{\varphi,t}\times C_{\varphi,t}$ の方程式を計算すると, 次の様な簡明な結果を得る。

$$(15)\qquad X_\psi:\quad \begin{aligned} s(X_1X_2)^2-(s-1)(X_1X_2)+(X_1+X_2)+1\ &=\ 0,\\ Y_1\ &=\ Y_2\end{aligned}$$

$C_{s,t}$ は二つの自由パラメータ s,t を含む。これは実 2 次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ に属する Hilbert modular 曲面 が有理曲面であることと対応している。一方, (15) には t が現れない。これは, Hilbert modular 曲面が既知のものより精密な moduli 的構造を持つことを示唆すると思われる。最後に, 方程式 (14),(15) は共に, $\mathbf{Q}(s,t)$ 上で定義され, 従ってパラメータ s,t に有理数を代入すれば, $\mathbf{Q}$ 上の曲線 $C(s,t)$ を得るのみならず, $Jac(C(s,t)$ は GL(2)-type になることを注意する。これより, §1 で述べた modular conjecture 等を実例で検証することも原理的には可能である。実際にいくつかの例について数値的に modular conjecture が検証出来ている。

参考文献

[1] G.v.d. Geer : Hilbert modular surface. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988.

[2] P.Griffith,and J.Harris: On Cayley's Explicit solution to Poncelet's porism, Enseigne.Math. II, Ser.24 (1978).

[3] K. Hashimoto : Explicit form of quaternion modular embeddings, to appear in Osaka Math.J.

[4] K.Hashimoto and N.Murabayashi: Shimura curves as intersections of Humbert surfaces and defining equations of QM-curves of genus two, Tohoku Math.J. 47 (1995), 271-296.

[5] R. W. H. T. Hudson : Kummer's quartic surface. Cambridge University Press, 1990.

[6] G. Humbert : Sur les fonctions abéliennes singulières, Œuvres de G. Humbert 2, pub. par les soins de Pierre Humbert et de Gaston Julia, Paris, Gauthier-Villars (1936), 297-401.

[7] J.Igusa : Arithmetic variety of moduli for genus two, Ann of Math.72 (1960), 612-649.

[8] A. Krazer : Lehrbuch der Thetafunktionen, Chelsea, New York, 1970.

[9] F.Mestre : Familles de courbes hyperelliptiques multiplications reélles, Arithmetic Algebraic Geometry, Birkhäuser, (1991), 193-208.

[10] D. Mumford : Abelian varieties. Oxford University Press, London, 1970.

[11] F.Oort,and H.J.M.Bos : ポンスレの閉形定理 (上野健爾 訳), 数学セミナー 1986.5 – 1986.8

[12] G. Shimura : Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Princeton Univ. Press, 1971.

[13] J.Tate : Endomorphisms of abelian varieties over finite fields, Invent. Math., 2 (1966),134-144.

謝辞. 研究集会の後で, 愛知工大の 柳井裕道氏から文献 [11] の存在を知らせて頂いた。ここに改めてお礼を申し上げます。